Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto V con dos operaciones, una se llama producto punto y se representa con $\odot$ y la otra se llama suma vectorial y se representa con $\oplus$. Lo clave del espacio es que estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son elementos cualesquiera de V entonces:

    a) Clausurativa: $\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$

Subespacios

Un subespacio W es un subconjunto de los elementos de un espacio V, que también es espacio con respecto a las mismas operaciones del espacio original

- Todo espacios vectorial tiene dos subespacios, el mismo y el subespacio cuyo único elemento es el vector cero, $\vec{0}$. Lo primero es evidente, pues todo el conjunto es subconjunto de sí mismo y al ser espacio, ya se mostró que cumple con las propiedades para ser subespacio. Lo último es fácil de probar pues $\vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0}$ y $c \odot \vec{0} = \vec{0}$.

- Un teorema (el 6.2 de Kolman2006) dice que basta con demostrar que se satisfacen la propiedad clausurativa para $\odot$ y $\oplus$, o, de forma alternativa, que para dos vectores arbitrarios $\vec{v}, \vec{w} \in W$ y dos escalares arbitrarios a, b se cumple que $a\vec{v} + b\vec{w} \in V$.

- Ejemplos: $\mathbb{R}^2$, las matrices simétricas.

Espacio solución

Sea $A\vec{x} = \vec{0}$ un sistema homogéneo, donde A es de tamaño $m \times n$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si W es el espacio de todas los vectores en $\mathbb{R}^n$ que son soluciones de este sistema. Dado que $A\vec{0} = \vec{0}$, sabemos que $\vec{0} \in W$ y por tanto el subespacio es no vacio. Por otro lado, supongamos que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son soluciones, es decir, que $A\vec{x} = \vec{0}$ y $A\vec{y} = \vec{0}$, luego

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

entonces, la suma de soluciones es solución. En cuanto al producto por escalar tenemos que

$$A(c\vec{x}) = c(A\vec{x}) = c(\vec{0}) = \vec{0}$$

por tanto el producto de un escalar por una solución es solución. Como se satisfacen las dos propiedades que definen es subespacio, tenemos entonces que las soluciones de un sistema homogeneo, constituyen un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que se llama espacio nulo o espacio solución.